ANÁLISE E CONSISTÊNCIA: UMA ABORDAGEM SOBRE DESIGUALDADES E SUAS APLICAÇÕES

ANÁLISE E CONSISTÊNCIA SOBRE APLICAÇÕES DE DESIGUALDADES MATEMÁTICAS

AUTORES: Belchior César Xavier Mário[1]
Teófilo Domingos Chihaluca[2]
Anacleto César Xavier Mário[3]
Fidel César Xavier Mário[4]
Delphin Kabey Mwinken[5]

DIRECÃO PARA CORRESPONDENCIA: belckcesar@yahoo.com.br

Data da recepção: 01/03/2019

Data da aceitação: 16/04/2019

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre importantes Desigualdades Matemáticas, para a resolução de problemas físicos, químicos, biológicos, económicos e outros que podem ser abordados nos diferentes níveis da ciência. Neste sentido, nosso objectivo é percorrer este caminho provocados por problemas que ilustrem a aplicabilidade do conhecimento matemático, para ajudar a melhorar, resolver e ultrapassar, com várias possibilidades, diferentes aspectos sobre esta temática e suas aplicações, utilizando demonstrações de grandes teoremas, como seria espetável.

PALAVRAS-CHAVE: Análise; Desigualdades; Aplicações.

ANALYSIS AND CONSISTENCY: AN APPROACH TO INEQUALITIES AND THEIR APPLICATIONS

ABSTRACT

In this work we present a study about important Mathematical Inequalities, for the resolution of physical, chemical, biological, economic and other problems that

[1] Professor do Departamento de Métodos Quantitativos, da Faculdade de Economia do Huambo, da Universidade José Eduardo dos Santos
[2] Investigador do Centro de Matemática Aplicada a Previsões da Universidade de Lisboa. Email: teodomingos140@hotmail.com
[3] Professor e Investigador de Matemática Aplicada e Estatística. Email: anitomario@yahoo.com.br
[4] Licenciado em Física, pelo Instituto Superior de Ciências da Educação do Huambo e Investigador. Email: fidelmrio@yahoo.com.br
[5] Professor Assistente do Instituto Superior Politécnico do Huambo. Email: delphinsrc@gmail.com

can be approached at different levels of science. In this sense, our objective is to follow this path caused by problems that illustrate the applicability of mathematical knowledge, to help improve, solve and overcome, with several possibilities, different aspects on this theme and its applications, using demonstrations of great theorems, as would be witty.

KEYWORDS: Analysis; Inequalities; Applications.

INTRODUÇÃO

Durante os últimos anos, as Desigualdades têm desempenhado um papel crucial no desenvolvimento do conhecimento científico e tecnológico da Matemática. Ao longo dos anos, com o desenvolvimento da ciência, dos mercados e, do carácter "*high-tech*" das finanças modernas e suas aplicações, tem-se registado necessidade crescente de métodos e técnicas sofisticadas que assentam, em grande medida, habilidades matemáticas que se afiguram como fundamentais para a competitividade na resolução dos desafios da ciência.

As Desigualdades Matemáticas surgiram desde que se notou a necessidade de ordenar números, provavelmente, quando se começou a usar os números, a se fazer medições, aproximações ou até mesmo procurando limites. Neste sentido, as Desigualdades têm um papel muito distinto na evolução da Matemática moderna.

O estudo das Desigualdades Matemáticas que durante muitos anos foi se destacando e desenvolvendo no mundo da ciência moderna, calcula-se que tenha começado no século IV a.C. e, durante muitos anos não se conhecia nenhum método uniforme para determinar máximos e mínimos de tal problemas. Assim, os primeiros passos e métodos surgiram no século XVII, como forma de contributo e avanços verificados na ciência.

Ao longo da história da Matemática surgiram muitos problemas de Desigualdades, envolvendo grandes matemáticos, tais como Euclides, Arquimedes, Heron, Tartaglia, Jacques Bernoulli, Newton, Cauchy e outros. Por esse facto, as Desigualdades Matemáticas constituem uma área de conhecimento em desenvolvimento. Assim, desde o aparecimento dos vários trabalhos pioneiros, a investigação tem colocado desafios fecundos entre às várias ciências do nosso quotidiano.

No presente trabalho foram abordadas algumas Desigualdades, como a Desigualdade de Cauchy, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Desigualdade Triangular, a Desigualdade entre as Médias, a Desigualdade de Jensen, a Desigualdade de Hölder, a Desigualdade de Young e a Desigualdade de Gronowall. No entanto, para o caso da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, importa referir que possui grandes aplicações na Análise, Álgebra Linear, Mecânica Quântica, Probabilidade, Estatística e outras áreas (ver, Wu).

Segundo Garbi (2001), a Desigualdade Triangular é utilizada para aplicações de Geometria Euclidiana e nos números complexos. E para Oliveira (2009), a Desigualdade entre as Médias é normalmente abordada no Ensino Médio e Superior para resolver problemas de optimização. Enquanto Barata (2013), faz abordagens sobre a Desigualdade de Jensen que é bastante utilizada no estudo de optimização de funções convexas e ganhando destaque nas áreas de Mecânica, Termodinâmica e Probabilidade.

Müller (2011), nas suas abordagens faz referência sobre o estudo constante de um conjunto alargado de instrumentos matemáticos que permitem o domínio da utilização de vários problemas, com elevado grau de complexidade. Ainda assim, afirma que é necessário e importante a implementação de esforços estritamente excepcionais, de modo a permitir um maior rigor no estudo teórico-prático da Teoria de Medida, Teoria de Probabilidade e Processos Estocásticos.

Já Bonelli (2017), durante as suas investigações faz um estudo sobre Desigualdades Matemáticas e explora aplicações para a resolução de problemas de Geometria, Álgebra e Análise que podem ser tratados no Ensino Médio. Por sua vez, destaca o seu estudo, com ilustrações pela relação de ordem, maior, menor e igual, dando a entender a necessidade em ordenar números, medidas e aproximações numéricas.

Ainda Magalhães (1996) faz uma abordagem sobre a utilização do estudo de Integrais Múltiplo em R^n e afirma que é importante ter-se a capacidade de interpretar os vários problemas, para ajudar na compreensão rigorosa e não só, tendo em conta os diferenciados tipos de problemas matemáticos, dando a entender a habitual resolução exigente das Equações Integrodiferenciais.

Por outro lado, Sydsaeter e Hammond (2006), no decorrer das abordagens, afirmam a necessidade do conhecimento do Cálculo Integral para funções de uma e várias variáveis em R^n e sobre a compreensão da teoria matemática, económica e outras ciências. Ainda por sua vez, alertam que é importante os alunos de matemática, física, economia e outras ciências, adquirirem hábitos, capacidades e habilidades matemáticas suficientes, de modo a serem capazes de ler e interpretar diferentes literaturas que necessitem para os estudos constantes.

Assim, nesta era moderna, caracterizada pelo desenvolvimento técnico e científico, os actuas pesquisadores precisam conhecer, testar e dominar diversas ferramentas sobre Desigualdades Matemáticas e suas Aplicações, de modo a poderem minimizar, resolver e ultrapassar as dificuldades que a cada dia são verificados no decorrer da vida.

Este trabalho visa analisarmos o estudo de algumas Desigualdades Matemáticas e suas Aplicações, desde o ponto de vista elementar e analítico, isto é, usando conceitos, teoremas e propriedades básicas fundamentais, com recurso às temáticas da aplicação das Equações Integrodiferenciais, para a resolução de inúmeros problemas.

Um aspecto importante e que merece especial atenção é a identificação, formalização e resolução de inúmeros problemas sobre Desigualdades Matemáticas e suas Aplicações, como de outras áreas conceptuais. Assim, para melhor compreensão exige-se uma maturação progressiva de ideias, pelo que, o trabalho produtivo tem de ser feito com profundidade e regularidade ao longo de um período considerável, sem interrupções prolongadas e não pode ser substituído por estudos intensivos de última hora, como se tem verificados em certos casos.

Para o presente trabalho, inicialmente realizou-se uma recolha de material bibliográfico significativo, para a compreensão detalhada da Análise e Consistência sobre Desigualdades Matemáticas e suas Aplicações a ser utilizado. Desta forma, recorreu-se a livros, artigos científicos, monografias, teses e dissertações, *webpages* e outros elementos fundamentais necessários.

Uma boa parte do nosso trabalho, centra-se em descrever de forma intuitiva, mas ao mesmo tempo rigorosa, o estudo da Análise e Consistência sobre Desigualdades Matemáticas. De seguida, centrou-se a atenção na aplicação e implementação das mesmas, usando conceitos, teoremas, propriedade e técnicas da matemática elementar. Após isso, efectuou-se uma análise, em como a resolução desses problemas podem ser importante, para optimizar o desempenho e resolver os diversos problemas matemáticos, físicos e económicos da actualidade.

CONCEITOS BÁSICOS E PROPRIEDADES ELEMENTARES

Nesta secção introduzem-se as noções matemáticas e as notações usadas ao longo do trabalho. São incluídos resultados clássicos bem conhecidos da Análise. No entanto, ao enuncia-los, torna a leitura do trabalho mais confortável e tranquila. Os resultados são enunciados, pois, algumas das suas demonstrações estão em grande parte nos manuais de Análise Matemática e Análise Funcional.

DEFINIÇÃO 2.1 (MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES): Suponha uma lista de $n > 1$ números reais, $x_1, x_2, x_3, + \cdots +, x_n$, a média aritmética A, é definida por:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

PROPRIEDADES 2.2 (MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES)

A média aritmética define a soma dos números de uma determinada lista, isto é, se substituirmos cada um dos números, $x_1, x_2, x_3, + \cdots +, x_n$ por A, obtém-se:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = n \cdot A = \underbrace{A + A + A + \cdots + A}_{n\ vezes}.$$

NOTA 2.3: Note-se que esta é a média simples de ser calculada, porque bastará somarmos os números de uma lista e em seguida, dividirmos o resultado pela quantidade de números da mesma lista.
Para a média aritmética simples, cada número possui exactamente a mesma importância ou peso, isto é, se tivermos uma lista de números que possuem importância relativa ou pesos diferentes, deve-se utilizar uma média que considere esses pesos, o que significa dizer estarmos perante a média aritmética ponderada.
DEFINIÇÃO 2.4 (MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA): Suponha uma lista de $n > 1$ números reais, $x_1, x_2, x_3, + \cdots +, x_n$, com pesos respectivamente iguais a $p_1, p_2, p_3, + \cdots +, p_n$, a média aritmética ponderada P, é definida por:

$$P = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n}$$

DEFINIÇÃO 2.5 (MÉDIA GEOMÉTRICA): Suponha uma lista de $n > 1$ números reais positivos, $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, a média geométrica G é definida por:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

PROPRIEDADES 2.6 (MÉDIA GEOMÉTICA)

A média geométrica define o produto dos números de uma determinada lista. Isto é, se substituirmos cada número $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, por G, tem-se:

$$x_1 . x_2 . x_3 . \cdots . x_n = G^n = \underbrace{G \cdot G \cdot G \cdot \cdots \cdot G}_{n \text{ vezes}}$$

Definição 2.7 (MÉDIA HARMÔNICA SIMPLES): Suponha uma lista de $n > 1$ números reais positivos, $x_1, x_2, x_3, + \cdots +, x_n$, a média harmônica H é definida por:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

PROPRIEDADES 2.8 (MÉDIA HARMÔNICA SIMPLES)

A média harmônica define a soma dos inversos dos números de uma determinada lista. Isto é, se substituirmos cada número $x_1, x_2, x_3, + \cdots +, x_n$, por H, obtemos:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n} = n \cdot \frac{1}{H} = \underbrace{\frac{1}{H} + \frac{1}{H} + \frac{1}{H} + \cdots + \frac{1}{H}}_{n \text{ vezes}}$$

MEDIDA E INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES

DEFINIÇÃO 2.9 (TOPOLOGIA): Considere um conjunto não vazio X e seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X. Diz-se que $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ constitui uma topologia em X, se forem verificadas as seguintes propriedades abaixo:

a) $\Phi \in \tau \; e \; X \in \tau$;
b) Se $V_i \in \tau, \; i = 1,2, \cdots, n$, então $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \in \tau$;
c) Se $\{V_\alpha\}$ é um conjunto arbitrário de elementos de τ, então,

$$\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \in \tau$$

O conjunto X ou o par (X,τ) designa-se, nestas condições, por espaço topológico e os elementos de τ por conjuntos abertos em X para a topologia τ.

Um conjunto $E \subset X$ diz-se fechado para a topologia τ, se o seu complementar, $\bar{E}$, for um aberto. E, uma vizinhança de um ponto qualquer $p \in X$ define-se como sendo um qualquer conjunto que contenha um aberto de X que contenha p.

NOTA 2.10: Tome-se um conjunto X não vazio, uma função $d: X * X \to R$ diz-se uma distância, se forem verificadas as seguintes propriedades abaixo:

a) $0 \leq d(x,y) < \infty,\ \forall x,y \in X$;
b) $d(x,y) = 0$, se $x = y$;
c) $d(x,y) = d(y,x),\ \forall x,y \in X$;
d) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ \forall x,y,z \in X$ (desigualdades triangular).

DEFINIÇÃO 2.11 (CONJUNTO LIMITADO): Um conjunto limitado $M \subset X$ é limitado, se existirem $x \in X$ e $r > 0$, tais que $M \subset \mathcal{B}_r(x)$.

DEFINIÇÃO 2.12 (SUCESSÃO LIMITADA): Uma sucessão limitada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é limitado, se existir $K > 0$, tal que $\|x_n\| \leq K, \forall n \in \mathcal{N}$.

DEFINIÇÃO 2.13 (CONVERGÊNCIA FORTE): Uma sucessão $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ converge para $x > X$, quando $k \to \infty$, se,

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$$

DEFINIÇÃO 2.14 (DERIVADA FORTE CLÁSSICA): Seja $f: R^n \to R$ uma função contínua em x, então defini-se derivada parcial de f em relação à coordenada i, dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x - he_i) - f(x)}{h}$$

DEFINIÇÃO 2.15 (MEDIDA POSITIVA): Considere um espaço mensurável (X,A), chama-se medida positiva a uma aplicação,

$$\mu: W \to [0,+\infty],$$

tal que se verificam os seguintes axiomas,

a) $\exists W \in A: \mu(W) < +\infty$;
b) Se $W_i \in A_i, i = 1,2,\cdots$ com $W_i \cap W_j = \Phi(i \neq j)$, então,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

esta propriedade é referida como σ-aditividade.

NOTA 2.16: Um espaço de medida é um espaço mensurável, no qual está definida uma medida positiva e representa-se pelo termo (X, A, μ). Uma medida complexa é uma função complexa $\mu: W \to \not\subset$, que é apenas σ-aditiva.

DEFINIÇÃO 2.17 (ESPAÇO MENSURÁVEL): Seja X um conjunto não vazio, $A \subset \mathcal{P}(X)$ diz-se uma σ-álgebra em X, se satisfaz os axiomas seguintes:

a) $X \in A$;
b) Se $W \in A$ então $\overline{W} \in A$;
c) Se $W_i \in A,\ i = 1,2 \cdots$ então, $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \in A$.

O conjunto X munido de uma σ-álgebra em A ou o par (X, A) chama-se espaço mensurável e os elementos de A designam-se por conjuntos mensuráveis.

PROPOSIÇÃO 2.18: Um espaço mensurável não é, em geral, um espaço topológico, porque no conceito de σ-álgebra fala-se de uniões numeráveis e no de topologia em uniões arbitrárias, ou seja, uniões mais abrangentes.

TEOREMA 2.19: Considere um espaço de medida (X, A, μ) e sejam $s, t: X \to [0, +\infty]$ funções simples mensuráveis. Então,

$$\int_X (s+t)\,d\mu = \int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrado em [13].

TEOREMA 2.20 (CONVERGÊNCIA MONÓTONA): Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções mensuráveis $f_n: X \to [0, +\infty]$ e suponha-se:

a) A sucessão é monótona crescente,
$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x), \forall x \in X;$$
b) Existe limite pontual da sucessão,
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \ \forall x \in X.$$

Então, a função limite f é mensurável e o limite permuta com o integral,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrado em [13].

TEOREMA 2.21: Considere-se um espaço de medida (X, A, μ) e sejam $f, g: X \to [0, +\infty]$ funções mensuráveis. Então,

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrado em [13].

TEOREMA 2.22 (FUBINNI): Sejam $A \subset R^n$ e $B \subset R^n$ intervalos compactos e $f: A \times B \longrightarrow R$ uma função integrável à Riemann no intervalo $A \times B \subset R^{n+m}$. Então,

$$\int_{A\times B} f = \int_A \left(\int_{-B} f_x \right) dx = \int_A \left(\bar{\int_B} f_x \right) dx = \int_B \left(\int_{-A} f_x \right) dx = \int_B \left(\bar{\int_A} f_x \right) dx$$

onde,

$$f_x : B \longrightarrow R \; e \; f_y : A \longrightarrow R,$$

satisfaz,

$$f_x(y) = f_y(x) = f(x, y)$$

e todos os integrais indicados existentes.
A demonstração deste teorema pode ser encontrado em [10].
TEOREMA 2.23 (CRITÉRIO DE INTEGRABILIDADE DE LEBESGUE): Seja $I \subset R^n$ um intervalo compacto. Uma função limitada $f: I \longrightarrow R$ é integrável à Riemann se só se é contínua $q.c. \, em \, I$.
A demonstração deste teorema pode ser encontrado em [13].
TEOREMA 2.24: Seja $I \subset R^n$ um intervalo compacto. Se $f: I \longrightarrow R$ é uma função limitada integrável à Riemann, então existe uma sucessão de funções em escada $\{s_k\}$ definidas em I, crescente, cuja sucessões integráveis $\{\int_I s_k\}$ são limitada, tal que $s_k \longrightarrow f \; q.c.$ em I não converge para $f(x)$ em medida nula. Além disso,

$$\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_I s_k$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrado em [10].
PROPOSIÇÃO 2.25: Seja (X, A, μ) um espaço de medida:

a) Se f for uma função mensurável de X num intervalo $[a, b]$ de R e se $\mu(X) < +\infty$, então $f \in \mathcal{L}(X)$ e,

$$a.\mu(X) \leq \int_X d\mu \leq b.\mu(X)$$

b) Se $f, g \in \mathcal{L}(X)$ e se $f \leq g$, então,

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$$

c) Se $f \in \mathcal{L}(X)$ e se $\lambda \in R$, então λf é integrável e,

$$\int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu$$

d) Se $\mu(X) = 0$ e $f: X \rightarrow \bar{R}$ for mensurável, então,

$$\int_X f\, d\mu = 0$$

e) Se $f \in \mathcal{L}(X)$ e se $\Upsilon \in A$, então $f|_\Upsilon \in \mathcal{L}(\Upsilon)$;

f) Se f é uma função mensurável de X em $\overline{R_+}$ e $\int_X f\, d\mu = 0$, então, $f(x) = 0, q.c.$

TEOREMA 2.26 (DESIGUALDADE JENSEN): Sejam (X, A, μ) um espaço de medida tal que $\mu(X) = 1$, sejam $a, b \in \bar{R}$ tais que $a < b$, seja f uma função mensurável de X em $]a, b[$ e seja φ uma função convexa de $]a, b[$ em R. Então, $\int_X f\, d\mu \in]a, b[$, a função $\varphi \circ f$ é mensurável e

$$\varphi\left(\int_X f\, d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f\, d\mu$$

DEMONSTRAÇÃO: Sabe-se pela primeira alínea da proposição 2.25 e por se estar a supor que $\mu(X) = 1$, que $a \leq \int_X f\, d\mu \leq b$. Se se tivesse $\int_X f\, d\mu = a$, então ter-se-á $\int_X f - a\, d\mu = 0$, o que, pela sexta alínea da preposição 2.25, implicaria que $f(x) = a, q.c.$, o que é impossível. Assim, o mesmo argumento mostra que $\int_X f\, d\mu < b$.

Seja ainda $\iota = \int_X f\, d\mu$ e seja,

$$s = sup\left\{\frac{\varphi(\iota) - \varphi(t)}{\iota - t} \mid t \in]a, \iota[\right\}$$

Resulta imediatamente da definição de s que se $t \in]a, \iota[$, então,

$$\frac{\varphi(\iota) - \varphi(t)}{\iota - t} \leq s \Leftrightarrow \varphi(\iota) - \varphi(t) \leq s(\iota - t) \Leftrightarrow \varphi(t) \geq \varphi(\iota) + s(t - \iota)$$

Pela definição de s que $t \in]\iota, b[$ e usando a mesma técnica anterior, resulta a desigualdade que,

$$\int_X \varphi \circ f\, d\mu \geq \int_X \varphi(\iota) + s(f - \iota) d\mu = \varphi(\iota) + s\left(\int_X f\, d\mu - \iota\right) = \varphi\left(\int_X f\, d\mu\right).$$

Chegamos à prova do resultado pretendido.

TEOREMA 2.27 (DESIGUALDADE DE CAUCHY): Sejam $a, b \geq 0$ e $\epsilon > 0$ números reais, então:

$$ab \leq \frac{\epsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\epsilon}$$

TEOREMA 2.28 (DESIGUALDADE DE YOUNG): Sejam $a, b \geq 0, 1 < p, p' < +\infty$ $\epsilon > 0$ números reais, então:

$$ab \leq \frac{\epsilon a^p}{p} + \frac{\epsilon^{1-p'} b^{p'}}{p'}$$

onde,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

DEFINIÇÃO 2.29: Sejam dois elementos p e q de $[1,+\infty]$ diz-se que são expoentes conjugados, se ${}^{1}/_{p} + {}^{1}/_{q} = 1$.

TEOREMA 2.30 (DESIGUALDADE DE HÖLDER): Sejam (X, A, μ) um espaço de medida e $p, q \in]1,+\infty[$ dois expoentes conjugados. Se f e g são funções mensuráveis de X em $\overline{R_+}$, então,

$$\int_X fg\ d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

TEOREMA 2.31 (DESIGUALDADE DE MINKOVSKI): Sejam (X, A, μ) um espaço de medida e $p, g \in]1,+\infty[$. Se f e g são funções mensuráveis de X em $\overline{R_+}$, então,

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

TEOREMA 2.33 (DESIGUALDADE DE GRONWALL): O teorema tem duas formas de ser apresentado:

a) Forma Diferencial: Suponha-se h e r são integráveis em $]a, b[$ e não negativas $q.c.$ $]a, b[$. Se $y \in C([a, b])$, $y_t \in (]a, b[)$ e a desigualdade seguinte é satisfeita:

$$y_t(t) \leq h(t) + r(t)y(t), \qquad q.c.\, t \in]a, b[$$

então,

$$y(t) \leq \left(y(a) + \int_a^t h(s)e^{-\int_a^s r(\tau)d\tau} ds\right) e^{\int_a^t r(s)ds}$$

b) Forma Integral: Suponha-se h é contínua em $[a, b]$, r integrável em $]a, b[$ e $h, r \geq 0\ q.c.$ em $]a, b[$. Se y é uma função contínua em $[a, b]$ e satisfaz a inequação dada por:

$$y_t(t) \leq h(t) + \int_a^t r(s)y(s)\ ds\,, \qquad t \in [a, b]$$

então,

$$y_t(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s)r(s)e^{\int_s^t r(\tau)d\tau}\, ds, \qquad t \in [a,b]$$

APLICAÇÃO ANALÍTICA DOS PROBLEMAS COM DESIGUALDADES

Nesta secção são apresentados alguns resultados, obtidos com exemplos aplicados à diversos tipos de Desigualdades, de modo a conseguirmos uma maior compreensão e entendimento dos vários problemas desta temática.

APLICAÇÃO 3.1 (DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARS): Encontrar o valor máximo de,

$\varphi(x) = 3\sin(x) + 4\cos(x)$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Para o problema de Desigualdade acima, para dois números, tem-se:

$$|ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2}\,.\sqrt{c^2 + d^2}$$

Fazendo $a = 3,\ b = 4,\ c = \sin(x),\ d = \cos(x)$, temos,

$$|3\sin(x) + 4\cos(x)| \leq \sqrt{3^2 + 4^2}\,.\sqrt{(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2}$$

Deste modo,

$$3\sin(x) + 4\cos(x) \leq 5$$

Com a Desigualdade ocorrendo se e só se,

$$\frac{3}{\sin(x)} = \frac{4}{\cos(x)}$$

tal que,

$$\tan(x) = \frac{3}{4}$$

APLICAÇÃO 3.2 (DESIGUALDADE JENSEN): Suponha um investimento em kwanzas. E, se este investimento num ano k cresce para $1 + r_k$ kwanzas no final do ano, chamaremos de r_k ao retorno do nosso investimento $0 < r_k < \infty$ no ano k. Mostrar que o valor $V = (1 + r_1) + (1 + r_2) + (1 + r_3) + \cdots + (1 + r_n)$ do nosso investimento após n anos deve satisfazer a condição:

$$(1 + r_G)^n \leq \prod_{k=1}^{n}(1 + r_k) \leq (1 + r_A)^n$$

onde

$$r_G = \sqrt[n]{r_1.r_2 \cdots r_n}$$

e

$$r_A = \frac{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}{n}$$

A Desigualdade da direita decorre de uma Média Aritmética e da esquerda da Média Geométrica $M_A \geq M_G$, aplicados à $a_k = 1 + r_k$, com $k = 1,2,\cdots,n$, tal que,

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+k_k)} \le \frac{(1+r_1)+(1+r_2)+\cdots+(1+r_n)}{n} = 1+\frac{r_1+r_2+\cdots+r_n}{n}$$

Assim,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+r_k) \le (1+r_A)^n$$

Já a Desigualdade da esquerda decorre de uma Desigualdade de Jensen, aplicados à função convexa $f(x)=\ln(1+e^x)$ e que para cada k, com $1\le k\le n$, ocorre $r_k=e^{x_n}$, de modo que,

$$\frac{\ln(1+e^{x_1})+\ln(1+e^{x_2})+\cdots+\ln(1+e^{x_n})}{n} \ge \ln\left[\frac{(1+e^{x_1})+(1+e^{x_2})+\cdots+(1+e^{x_n})}{n}\right] \Rightarrow \frac{\ln((1+e^{x_1})*(1+e^{x_2})*\cdots*(1+e^{x_n}))}{n} \ge \ln\left[\frac{n+e^{x_1}+e^{x_2}+\cdots+e^{x_n}}{n}\right]$$

.

E isto implica,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+r_k) \ge \left(1+\frac{r_1+r_2+\cdots+r_n}{n}\right)^n \ge \left(1+\frac{nr_G}{n}\right)^n = (1+r_G)^n$$

Acabamos de apresentar a resolução do problema utilizando Desigualdade entre as Médias e também a Desigualdade de Jensen.

APLICAÇÃO 3.3 (DESIGUALDADE TRIANGULAR): Suponha postes eléctricos de alturas h_1 e h_2, respectivamente, estão separadas a uma distância d. Os postes estão lidados por um fio XPY que vai do topo X, do primeiro poste para um ponto P no posto de transformação que está no chão entre os postes e, então, até o topo Y do segundo poste.

Vamos resolver este problema, tendo em conta o ponto Y', reflexão do ponto Y em relação ao segmento ZW. Deste modo, mostraremos que o ponto P, é exactamente o ponto que nos dá o comprimento mínimo do fio. Assim, para isso, dá-nos o comprimento mínimo do fio. Então,

$$\Delta YPW \cong \Delta Y'PW \text{ e } \Delta YP'W \cong \Delta Y'P'W$$

temos que,

$$YP = Y'P \text{ e } YP' = Y'P'$$

Desta forma, usando o triangulo $XY'P'$ e a Desigualdade Triangular, obtém-se,
$XP'+P'Y = XP'+P'Y' > XY' = XP+PY' = XP+PY$

Portanto, P' não torna o comprimento do fio mínimo, e assim, o ponto P é o desejado e o comprimento é dado por $XP+PY$. Assim, calculando a distância entre P e W. E, como $XZ=h_1$, $YW=h_2$ e $ZW=d$, obtém-se:

$$\tan(\widehat{YPW}) = \frac{YW}{PW} = \frac{h_2}{PW} = \frac{h_1}{d - PW}$$

o que nos permite escrever,

$$PW = \frac{dh_2}{h_1 + h_2}$$

APLICAÇÃO 3.4 (DESIGUALDADE DE HÖLDER): Suponha α, β, γ números reais positivos, tais que tem-se:

$$\underbrace{\frac{\alpha}{\alpha + \sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}}}_{X} + \underbrace{\frac{\beta}{\beta + \sqrt{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)}}}_{Y} + \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma + \sqrt{(\gamma+\beta)(\gamma+\alpha)}}}_{Z} \leq 1$$

Usando a Desigualdade de HÖlder, para o caso $n = 2$ e os números reais positivos p e q, com $p = q = 2$, tais que, $1/_p + 1/_q = 1$, temos:

$$\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)} = \left(\sqrt{\alpha+\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha+\gamma}\right) = \left(\sqrt{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt{\beta}\right)^2}\right)\left(\sqrt{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt{\gamma}\right)^2}\right)$$

o que nos permite escrever,

$$\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)} = \left(\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt{\beta}\right)^2\right)^{1/2}\left(\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 + (\sqrt{\gamma})^2\right)^{1/2} \geq \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}\sqrt{\gamma}$$

onde,

$$\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)} = \sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\alpha\gamma}$$

Assim,

$$\frac{1}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\alpha\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}\right)}$$

para,

$$\frac{\alpha}{\alpha + \sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}} \leq \frac{\alpha}{\alpha + \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}\right)} = \frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}\right)}$$

é tal que,

$$\frac{\alpha}{\alpha + \sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}} \leq \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}}$$

Analogamente,

$$\frac{\beta}{\beta + \sqrt{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)}} \leq \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}}$$

e

$$\frac{\gamma}{\gamma + \sqrt{(\gamma+\beta)(\gamma+\alpha)}} \leq \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}}$$

Neste sentido, obtemos:

$$X + Y + Z \leq \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}} = 1$$

que prova a igualdade, se só se, $\alpha = \beta = \gamma$.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, sobre abordagem da Análise e Consistência de Desigualdades Matemáticas e suas Aplicações, verificou-se durante a realização do referido trabalho, tendo em conta os conceitos, demonstrações de teoremas e propriedades, que é importante ter o rigor pelos estudos constantes, para que sua aplicação e o desenvolvimento teórico-prático, sejam registadas todas e quaisquer anomalias na resolução dos vários problemas e outros.

Ao longo do nosso trabalho foi também apresentado uma série de conceitos, teoremas, propriedades e técnicas de resolução da matemática elementares, para ajudar analisar e resolver inúmeros problemas de Desigualdades Matemáticas e sua Aplicação, de modo a se poder minimizar e ultrapassar as constantes dificuldades que são verificadas na previsão dos resultados a serem obtidos.

Por outro lado, fazendo uma Análise da Aplicação dos conceitos, demonstrações de teoremas, propriedades e outros, verificou-se também que a utilização de Desigualdades Matemáticas e sua Aplicação no mundo da ciência são factores importante, pois, contribuem significativamente para selecionar os diferentes problemas da sociedade.

Com isto, sabe-se que a resolução de problemas é fundamental no Ensino da Matemática, fazendo com que o estudante enfrente novos desafios e desenvolva sua capacidade de raciocínio lógico, tornando-se mais crítico e interventivo. Assim, para trabalhos futuros podemos explorar estas desigualdades aplicando recursos mais avançados e mostrando que existem outros caminhos e outras áreas, onde elas são muito importantes. E, consequentemente ampliando o público de leitores, visto que diversas áreas usam ferramentas básicas do cálculo diferencial, integral e algébrico para as aplicações prática.

BIBLIOGRAFIA

Ash, RB. (1972). Real Analysis and Probability. Academic Press.
Ash, RB. & Doleans-Dale, CA. (2000). Probability and Measure Theory. Second Edition. Academic Press.
Araújo, F. H. A. (2011). Médias e Problemas de Otimização. Revista do Professor de Matemática, n. 76, p. 27–29.
Barata, J. C. A. Curso de Física-Matemática. São Paulo: Departamento de Física Matemática da USP, 2013.
Bonelli, R. (2017). Desigualdades Matemáticas e Aplicações. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Campus de Rio Claro.
Björk, T. (1998). Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford University Press.
Cevtkovski, Z. (2012). Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
Garbi, G. G. A. (2010). Rainha das Ciências: Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática. São Paulo: Editora livraria da Física 5a ed.
Hefez, A. (2002). Polinômios e Equações Algébricas. Rio de Janeiro: SBM.
Magalhães, L. (1996). Integrais Múltiplos. Texto Editora, Lda – Lisboa.
Mário, B. (2018). Um Ensaio sobre a Aprendizagem do Cálculo Integral Aplicado à Economia. Revista Órbita Pedagógica. ISSN 2409-0131.

Müller, D. (2007). Processos Estocásticos e Aplicações. Edições Almedina – Coimbra.
Müller, D. (2011). Probabilidade e Processos Estocásticos. II Série, N.º 17 Colecção Económicas. Edições Almedina – Coimbra.
Oksendal, B. (2007). Stochastic Differentia Equations. Na Intoduction with Applications. Springer.
Oliveira, L. A. F. & Souza, F. L. (2009). Desigualdade de Jensen. In: Anais do CNMAC. SBMAC.
Rudin, W. (1987). Real and Complex Analysis. Mc Graw-Hill. Third Edition.
Sydsaeter K. & Hammond, P. (2006). Matemática Essencial para Análise Económica (Parte II). Texto Editora, Lda – Moçambique.
Wu, H. H. & Wu, S. (2009). Various proofs of the Cauchy-Schwarz inequality. Mihály Bencze, v. 17, p. 221–229.